UVOD

Fourierov red je jedan od najvažnijih alata za rješavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. U ovoj radnji naglasak će biti na inženjerskoj praktičnoj primjeni Fourierovog reda, a ne toliko na njegovoj primjeni pri rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Teorija Fourierovog reda je relativno komplicirana, ali zato je njegova primjena nadasve jednostavna. Fourierov red je općenitiji od Taylorovog reda zato jer se mnoge diskontinuirane periodičke funkcije koje su od velikog praktičnog interesa (a ne mogu se razviti u Taylorov red), mogu razviti u Fourierov red.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), francuski fizičar i matematičar, uveo je u analizu Fourierov red i Fourierov integral - prikaz funkcije u terminima trigonometrijskih funkcija. Tijekom vremena razvijena je harmonijska analiza kao samostalna teorija apstraktnih Fourierovih redova i Fourierovih integrala, isprva vezana za proučavanje funkcija na klasičnim geometrijskim objektima kao što su sfera ili euklidski prostor.

Uveo nas je u koncept Fourierovih redova. Fourierov red je svaki izraz sljedećeg oblika.

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)).$$

** Neki autori koriste $A_0/2$ umjesto A_0.*

FOURIEROVI REDOVI, OSNOVNI REZULTATI

Sjetimo se da se svaki matematički izraz oblika:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)).$$

naziva Fourierovim redom.

Definicija A: Fourierov polinom je izraz sljedećeg oblika:

$$F_n(x) = a_0 + \Big(a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)\Big) + \cdots + \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\Big)$$

koji se može pisati i kao:

$$F_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big).$$

Konstante a_0, a_i i b_i, $i = 1, \cdots, n$, se zovu **koeficijentima** reda $F_n(x)$.

Fourierovi polinomi su 2π- periodične funkcije. Upotrebljavajući trigonometrijske transformacije:

$$\begin{aligned}
\sin(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\Big[\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)\Big] \\
\cos(mx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\Big[\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\Big] \\
\sin(mx)\sin(nx) &= \frac{1}{2}\Big[\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\Big]
\end{aligned}$$

mogu se jednostavno dokazati sljedeće formule:

(1)

za $n \geq 0$ imamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0, \ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = 0.$$

!!!! cos (0x)=1 za sve x pa (1) ne vrijedi kod cos za n=0, inače vrijedi za sve cijele n, a ne samo pozitivne !!!!

(2)

za *m* i *n*, imamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx = 0,$$

(3)

za $n \neq m$, imamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = 0.$$

(4)

za $n \geq 1$, imamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \pi, \ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx = \pi.$$

Upotrebljavajući gornje formule možemo jednostavno doći do sljedećeg rezultata:

Teorem: Ako je:

$$F_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big).$$

Tada je:

$$\begin{cases} a_0 &= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)dx, \\ a_k &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\cos(kx)dx, \quad 1 \le k \le n \\ b_k &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\sin(kx)dx, \quad 1 \le k \le n. \end{cases}$$

Ovaj teorem pomaže povezati Fourierove redove sa svakom 2π-periodičnom funkcijom.

Definicija: Neka je *f*(*x*) 2π-periodična funkcija koja je integrabilna na $[-\pi, \pi]$.

$$\begin{cases} a_0 &= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n = &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad 1 \le n \\ b_n &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad 1 \le n. \end{cases}$$

Trigonometrijski red:

$$a_0 + \sum \Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)$$

se zove Fourierov red funkcije *f*(*x*). To se označava na sljedeći način:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big).$$

Primjer: Treba naći Fourierov red funkcije:

$$f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Rješenje: Budući da je $f(x)$ neparna funkcija, tada je $a_n = 0$, za $n \geq 0$. Obratimo pozornost na koeficijent b_n. Za svaki $n \geq 1$, imamo:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}.$$

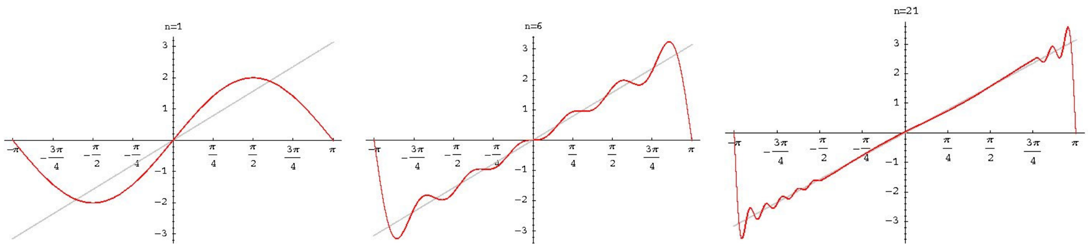
Pojednostavimo:

$$b_n = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Stoga:

$$f(x) \sim 2\left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} ....\right).$$

Slikoviti prikaz razvoja funkcije f(x)=x u Fourierov red



Primjer: Treba naći Fourierov red funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Rješenje: Imamo:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_0^{\pi} \pi dx\right) = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \int_0^{\pi} \pi\cos(nx)dx = 0, \quad n \geq 1,$$

i

$$b_n = \int_0^{\pi} \pi\sin(nx)dx = \frac{1}{n}(1-\cos(n\pi)) = \frac{1}{n}(1-(-1)^n).$$

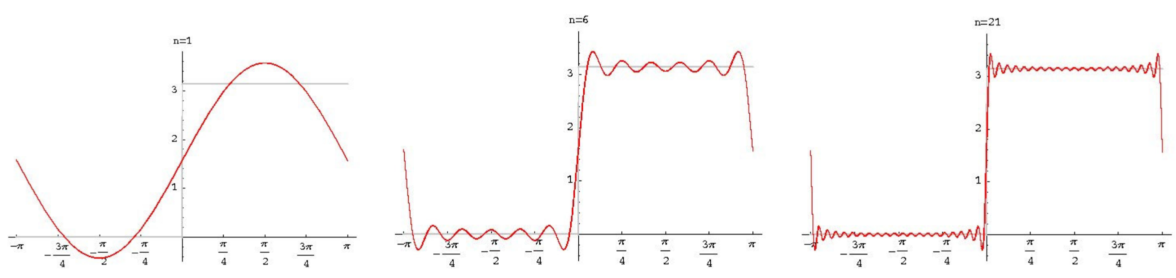
$b_{2n} = 0$ i

$$b_{2n+1} = \frac{2}{2n+1}.$$

Stoga Fourierov red funkcije $f(x)$ je:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + 2\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots\right).$$

Slikoviti prikaz razvoja funkcije $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ u Fourierov red



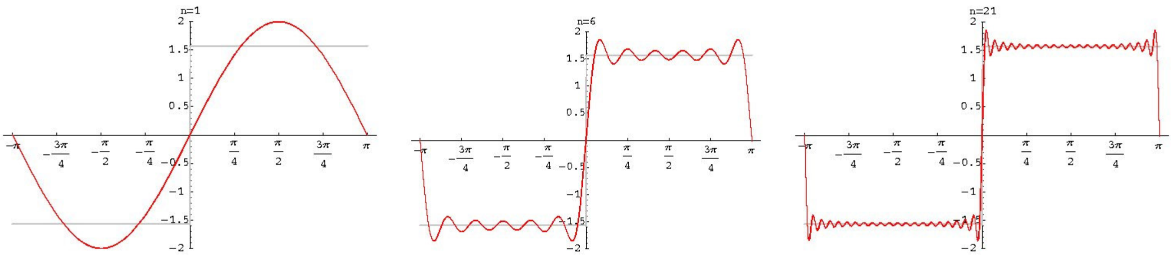
Primjer: Treba naći Fourierov red funkcije:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\le x<0\\[2ex] \dfrac{\pi}{2}, & 0\le x\le \pi\end{cases}$$

Rješenje: Kako je ova funkcije jednaka onoj u gornjem primjeru minus konstanta $\dfrac{\pi}{2}$. Tako je Fourierov red ove funkcije *f*(*x*):

$$f(x)\sim 2\left(\sin(x)+\frac{\sin(3x)}{3}+\frac{\sin(5x)}{5}+\ldots\right).$$

Slikoviti prikaz razvoja funkcije $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\le x<0\\ \dfrac{\pi}{2}, & 0\le x\le \pi\end{cases}$ u Fourierov red



Definirali smo Fourierove redove za funkcije koje su 2π-periodične, kako bi napravili slično za funkcije koje su *L*-periodične.

Pretpostavimo da je funkcija *f*(*x*) definirana i integrabilna na intervalu [-*L*,*L*] !!! i definirajmo funkciju F s:!!!

$$F(x)=f\left(\frac{Lx}{\pi}\right).$$

Funkcija *F*(*x*) je !!! !!! definirana i integrabilna !!!na!!! $[-\pi,\pi]$. !!!Razmotrimo!!! Fourierov red funkcije *F*(*x*):

$$F(x) = f\left(\frac{Lx}{\pi}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big).$$

Koristeći supstituciju $t = \frac{Lx}{\pi}$, dobivamo sljedeću definiciju:

Definicija. Neka je !!!*f*!!! funkcija koja je definirana i integrabilna na intervalu [-*L*,*L*] tada je Fourierov red od !!!*f*(*t*)!!!:

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\frac{\pi t}{L}\right) + b_n\sin\left(n\frac{\pi t}{L}\right)\right)$$

gdje je

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\cos(nx)dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\cos(nx)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\sin(nx)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx, \end{cases}$$

za $1 \leq n$.

Primjer: Naći Fourierov red funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

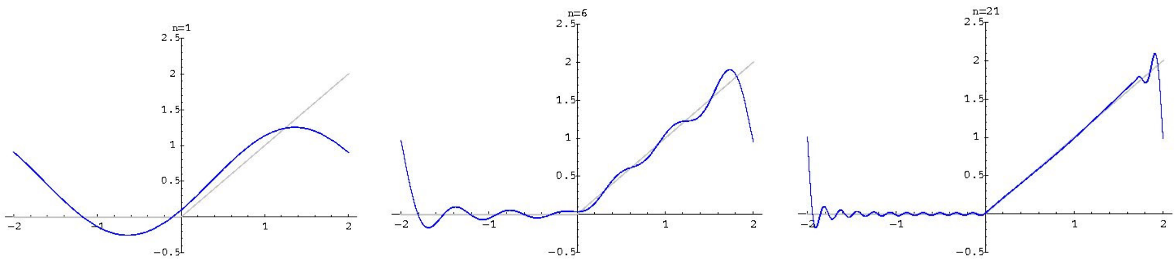
Rješenje: Kako je L = 2, dobivamo:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4}\int_0^2 x\,dx = \frac{1}{2}, \\
a_n &= \frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2(\cos(n\pi)-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2((-1)^n-1), \\
b_n &= \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\left(n\frac{\pi x}{2}\right)dx = -\frac{2\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

za $n \geq 1$. Stoga imamo:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\left(n\frac{\pi x}{2}\right)\right].$$

Slikoviti prikaz razvoja funkcije $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ u Fourierov red



FOURIEROVI REDOVI PO SINUSIMA I KOSINUSIMA

Sjetimo se da je Fourierov red od *f*(*x*) definiran sa:

$$a_0 + \sum \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

gdje je:

$$\begin{cases} a_0 & = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n = & = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad 1 \leq n \\ b_n & = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad 1 \leq n. \end{cases}$$

Dobivamo sljedeći rezultat:

Teorem. Neka je *f*(*x*) funkcija koja je definirana i integrabilna na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(1)
Ako je *f*(*x*) parna, tada imamo:

$b_n = 0,$ za sve $n \geq 1;$

i

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

(2)
Ako je *f*(*x*) !!!neparna!!!, tada imamo:

$a_n = 0,$ za sve $n \geq 0;$

i

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx.$$

Ovaj teorem pomaže definirati Fourierove redove funkcija koje su definirane samo na intervalu $[0, \pi]$. Glavna ideja je proširiti te funkcije na interval $[-\pi, \pi]$ i tada koristiti definiciju Fourierovog reda.

Neka je $f(x)$ funkcija definirana i integrabilna na intervalu $[0, \pi]$ i neka je:

$$f_1(x) = \begin{cases} -f(-x), & -\pi \leq x < 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

i

$$f_2(x) = \begin{cases} f(-x), & -\pi \leq x < 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Tada je f_1 neparna a f_2 parna. Jednostavno je provjeriti !!!da su !!! obje funkcije definirane i integrabilne na intervalu $[-\pi, \pi]$ i jednake f(x) na intervalu $[0, \pi]$. Funkcija f_1 se tada naziva "neparnim !!!produženjem!!!" od f(x), dok se f_2 naziva "parnim !!!produženjem!!!".

Definicija: Neka su $f(x)$, $f_1(x)$ i $f_2(x)$ definirane na način kako je to prikazano gore:

(1)

Fourierov red funkcije $f_1(x)$ se naziva **Fourierovim redom po sinusima !!! !!!** funkcije $f(x)$, i dan je sljedećim izrazom:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

gdje je:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx.$$

(2)

Fourierov red funkcije $f_2(x)$ se naziva **Fourierovim redom po kosinusima** funkcije $f(x)$, i dan je sljedećim izrazom:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

gdje je:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad \text{za} \quad n \geq 1.$$

!!! u formuli za a_0 ne treba izraz cos(nx)!!!

Primjer: Treba naći Fourierov red po kosinusima funkcije $f(x) = x$ za $x \in [0, \pi]$.

Rješenje: Imamo:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2},$$

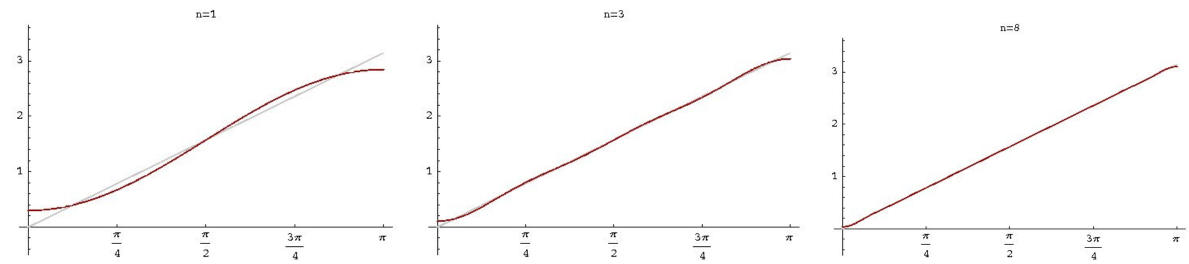
i

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2}{n^2\pi}(\cos(n\pi) - 1) = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1).$$

Stoga, imamo:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + \dots\right).$$

Fourierov red po kosinusima funkcije $f(x) = x$ za $x \in [0, \pi]$.



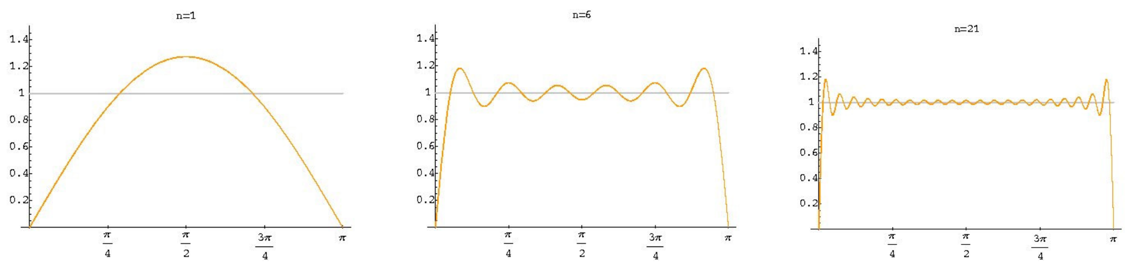
Primjer: Treba naći Fourierov red po sinusima funkcije $f(x) = 1$ za $x \in [0, \pi]$.
Rješenje: Imamo:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)dx = \frac{2}{n\pi}(-\cos(n\pi)+1) = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

Zatim:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x)...\right).$$

Fourierov red po sinusima funkcije $f(x) = 1$ za $x \in [0, \pi]$.



Primjer: Treba naći Fourierov red po sinusima funkcije $f(x) = \cos(x)$ za $x \in [0, \pi]$.

Rješenje: Imamo:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x)\sin(nx)\,dx$$

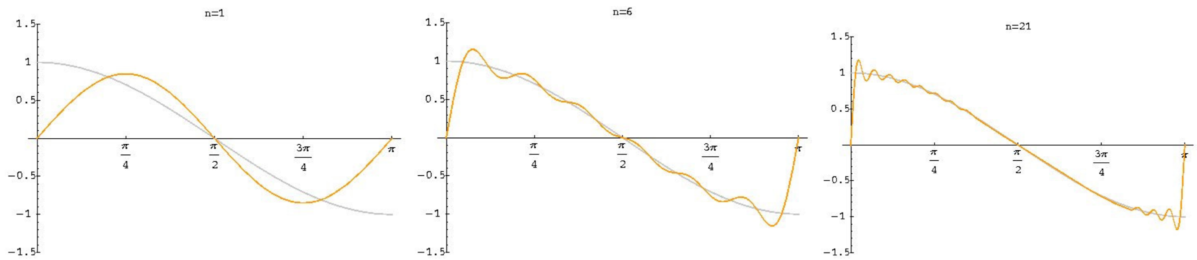
što daje $b_1 = 0$ i za $n > 1$, imamo:

$$b_n = \frac{2n}{\pi}\left(\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\right).$$

Stoga je:

$$\cos(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(2nx)}{4n^2-1}.$$

Fourierov red po sinusima funkcije $f(x) = \cos(x)$ za $x \in [0, \pi]$.



Poseban slučaj 2*L***-periodičnih funkcija:**

Kao i za 2π-periodične funkcije, možemo definirati Fourierove !!! redove po sinusima i po kosinusima!!! i za funkcije definirane na intervalu [-*L*,*L*]. Prvo, sjetimo se Fourierovih redova od *f*(*x*):

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\frac{\pi t}{L}\right) + b_n\sin\left(n\frac{\pi t}{L}\right)\right)$$

gdje je:

$$\begin{cases} a_0 &= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\cos(nx)dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx, \\ a_n &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\cos(nx)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx, \\ b_n &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\sin(nx)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx, \end{cases}$$

za $1 \leq n$.

1.

Ako je $f(x)$ parna, tada je $b_n = 0$, za $n \geq 1$. Štoviše, imamo:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx,$$

!!! ne treba cos(n) !!!

i

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx.$$

Napokon, imamo:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right).$$

2.

Ako je $f(x)$ neparna, tada je $a_n = 0$, za sve $n \geq 0$, i

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx.$$

Napokon, imamo:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right).$$

I definicija Fourierovih redova po sinusima i kosinusima može biti !!!slično!!! proširena. !!! !!!

KONVERGENCIJA FOURIEROVOG REDA

Većina rezultata prikazana za 2π-periodičn!!!e!!! funkcije, može se lako proširiti na 2*L*-periodične funkcije. !!Zato!! ćemo !!!govoriti!!! samo o 2π-periodičnim funkcijama.

Definicija: Funkcija *f*(*x*) !!! !!! definirana na [*a*,*b*] !!! !!! je !!!po dijelovima!!! **neprekidna** na čitavom intervalu ako !!! !!!! postoji podjela $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ intervala [*a*,*b*] takva da:

(1) *f*(*x*) je neprekidna !!! na!!! intervalu [*a*,*b*] osim možda za točke x_i,

(2) lijeva i desna granica *f*(*x*) u !!!točkama!!! x_i postoji.

Kažemo da je *f*(*x*) **glatka** na čitavom intervalu ako, i samo ako su i njezine derivacije definirane na čitavom intervalu.

Sjetimo se da je $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ podjela intervala [*a*,*b*] ako je:

$$a = x_1 < x_2 < .. < x_{n-1} < x_n = b.$$

Sva moguća rješenja sume, produkta i kvocjenta postoje i definirana s za neprekidne funkcije. Osim što se jedan od osnovnih matematičkih teorema mora malo modificirati. Doista, nema razloga da funkcija *f*(*x*) i njena derivacija *f'*(*x*) budu neprekidne i definirane u granicama intervala. Ali ako zanemarimo lijevu i desnu granicu intervala u točki x_0

$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0-)$ i $\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0+)$, osnovni teorem !!!diferencijalnog računa!!! se prevodi u:

$$\lim_{x \to b-} f(x) - \lim_{x \to a+} f(x) = \int_a^b f'(x)dx.$$

Prije nego izvedemo fundamentalne rezultate konvergencije Fourierovih redova, trebamo neke "međurezultate".

Napomena: Zapamtimo, da je jedan od naših glavnih problema aproksimirati funkciju globalno (na čitavom intervalu, dok su Taylorove aproksimacije lokalne). U skladu s navedenim, aproksimacija funcije *f*(*x*) bit će izvedena pomoću **Fourierovih polinoma**.

$$f_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Takvi Fourierovi polinomi nazivat će se **Fourierovim parcijalnim sumama.**
Kako je:

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nx)\cos(nt) + \sin(nx)\sin(nt))dt,$$

imamo:

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=N} \cos(n(t-x)) \right] dt.$$

postavimo:

$$D_N(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=N} \cos(n\alpha) \right).$$

Dobivamo sljedeći rezultat:

Rezultat:

$$D_N(\alpha) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\alpha)}{2\pi \sin(\frac{\alpha}{2})}.$$

Dokaz: Imamo

$$D_N(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin(\alpha) + \sum_{n=1}^{n=N}\cos(n\alpha)\sin(\alpha)\right).$$

Koristeći trigonometrijske formule dobivamo:

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b)) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(b-a)),$$

Znači:

$$D_N(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{1}{2\pi}(\sin(N\alpha)+\sin((N+1)\alpha)) = \frac{1}{\pi}\sin\left((N+\frac{1}{2})\alpha\right)\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right).$$

Stoga je:

$$D_N(\alpha) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\alpha)\cos(\frac{1}{2}\alpha)}{\pi\sin(\alpha)}.$$

Formula $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ dokazuje našu tvrdnju.

Koristeći gornji rezultat, dobivamo:

$$f_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})(t-x)\right)}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}dt.$$

Ova formula je poprilično interesantna, s obzirom da daje Fourierove polinome od f(x) bez koeficijenata.

Definicija: Dirichletov zakon kaže:

$$D_N(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{2\pi\sin(\frac{x}{2})} & x \neq 0, \pm 2\pi, ... \\ \dfrac{2N+1}{2\pi} & x = 0, \pm 2\pi, ... \end{cases}$$

Funkcija $D_N(x)$ je neprekidna i periodična, sa $\frac{2\pi}{N}$ kao njenim periodom. Koristeći gornju formulu, dobivamo:

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(x)dx = \int_{0}^{\pi} D_N(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Sada možemo izvesti i dokazati fundamentalni rezultat konvergencije Fourierovog reda !!!koji!!! (prema Dirichletu) kaže:

Teorem: Neka je $f(x)$ funkcija, koja je dvostruko derivabilna, tako da su $f(x)$, $f'(x)$, i $f''(x)$ definirane (postoje) na čitavom intervalu $[-\pi, \pi]$. Tada za svaki $x \in [-\pi, \pi]$, niz

Fourierovih parcijalnih suma $\{f_N(x)\}$ konvergira u aritmetičku sredinu $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+))$, kada n teži ∞.

Sjetimo se da oznake $f(x+)$ (odnosno $f(x-)$) predstavljaju desnu, odnosno lijevu granicu intervala, s obzirom na točku x kao točku gledišta i funkciju f. Sada ćemo povezati f sa novom funkcijom $S(f)$ definiranom na sljedeći način:

$$S(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ako je f neprekidna u x} \\ \dfrac{f(x+) + f(x-)}{2} & \text{ako je f ima točku prekida u x.} \end{cases}$$

Analogno iz prethodnog teorema sljedi:

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = S(f)(x), \text{ za svaki } x \in [-\pi, \pi].$$

Dokaz teorema:
Bez gubitka općenitosti, možemo pretpostaviti da je funkcija f(x) definirana i 2π-periodična na čitavom **R**. Stoga je i funkcija $D_N(t-x)f(t)$ je 2π-periodična u t. Koristeći Dirichletov zakon dobivamo:

$$f_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(t-x)dt.$$

Napravimo supstituciju $u = t\text{-}x$. Tada vrijedi:

$$f_N(x) = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x)D_N(u)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)D_N(u)\,dt.$$

Kako je D_N parna funkcija, pojednostavimo:

$$f_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_N(u)dt.$$

Stoga:

$$f_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} D_N(u)\,dt.$$

Kako su funkcije unutar integrala parne, dobivamo:

$$f_N(x) = \int_0^{\pi} (f(x+u)+f(x-u))D_N(u)\,dt.$$

S druge strane, dobivamo:

$$\int_0^{\pi} D_N(u)du = \frac{1}{2},$$

Što daje:

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \int_0^{\pi} (f(x+)+f(x-))D_N(u)\,dt.$$

Stoga je:

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} - f_N(x) = \int_0^{\pi} (\phi_1(u,x)+\phi_2(u,x))D_N(u)du,$$

gdje je $\phi_1(u,x) = f(x+) - f(x+u)$ i $\phi_2(u,x) = f(x-) - f(x-u)$.
Pokažimo da je:

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} \phi_1(u,x)D_N(u)du = 0.$$

Sljedi dokaz da je

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\phi_2(u,x)D_N(u)du=0$$

Postavimo funkciju $g(u)=\dfrac{\phi_1(u)}{u}$, zatim $U(u)=\dfrac{u}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)},$ za $u\neq 0,$ i $U(0)=1.$

Jednostavno je primjetiti da je $U(u)$ neprekidna i ima kontinuirane derivacije na intervalu $[-\pi,\pi]$. Također je jednostavno provjeriti da je:

$\lim_{u\to 0+} g(u)=f'(x+),$ i $\lim_{u\to 0+} g'(u)=\frac{1}{2}f''(x+).$

Znači, $g(u)$ i njezina derivacija su kontinuirane na čitavom intervalu $[-\pi,\pi]$. Prvi rezultat tada kaže:

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi} g(u)U(u)\sin(N+\frac{1}{2})udu=0.$$

Stoga je:

$$\int_0^{\pi} g(u)U(u)\sin(N+\frac{1}{2})udu=\int_0^{\pi}\phi_1(u,x)D_N(u)du,$$

Dokaz fundamentalnog teorema je sada kompletan.

Primjer: Pokažite da je:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n}\sin(nx)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & x=0\\ -1 & -\pi<x<0\end{cases}$$

Rješenje: Postavimo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0 \\ -1 & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Funkcija zadovoljava pretpostavke glavnog teorema. Prije nego upotrijebimo zaključke teorema, pronađimo Fourierov red ove funkcije. Imamo:

$a_n = 0$, za svaki $n \geq 0$.

Jednostavnim sređivanjem dobivamo:

$b_n = \frac{2}{\pi} \frac{(1 - (-1)^n)}{n}$, za svaki $n \geq 1$.

GIBBSOV FENOMEN

Ubrzo nakon Pojave Fourierovih redova, počelo se istraživati Gibbsov fenomen. Prvo ga je proučavao H. Wilbraham 1848., a zatim ga je u detalje analizirao Josiah W. Gibbs (1839-1903). Krenut ćemo sa primjerom:

Primjer: Promotrimo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

Kako je ova funkcija neparna, imamo $a_n = 0$, za $n \geq 0$. Direktno preračunavanje daje:

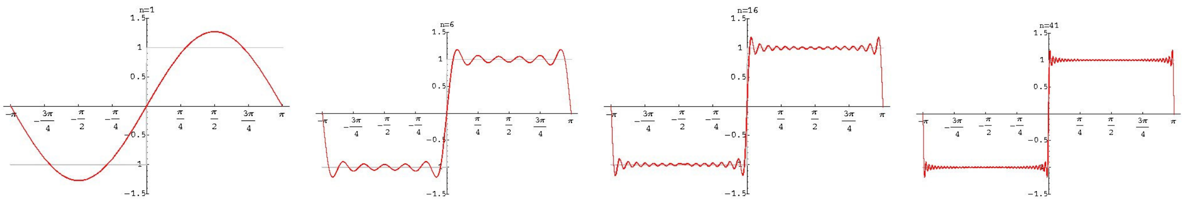
$$b_n = \frac{2}{\pi} \frac{(1 - (-1)^n)}{n}, \quad \text{za } n \geq 1.$$

za $n \geq 1$. Fourierove parcijalne sume od $f(x)$ su:

$$f_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \ldots + \frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)} \right).$$

Osnovni teorem kaže da red konvergira u $f(x)$ osim u točki $x_0 = 0$, kao točki prekida $f(x)$. Gibbs se zainteresirao za ponašanje niza suma baš u okolici te točke.

Ponašanje funkcije f(x) u okolici točke $x_0 = 0$



Gledajući u graf parcijalnih suma , primjećujemo čudan fenomen. Zaista, kada se x približi 0, graf prezentira "skok". Idemo to potvrditi matematički.
Promatrajmo drugu derivaciju od $f_{2n\text{-}1}$, što će nam pomoći naći točke maksimuma.

$$f'_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi}(\cos(x) + \cos(3x) + \ldots + \cos((2n+1)x)).$$

Koristeći trigonometrijske identitete dobivamo:

$$\pi \sin(x) f'_{2n-1}(x) = 2\sin(2nx).$$

Kritične točke od $f_{2n\text{-}1}$ su:

$$2nx = \pm\pi, \pm 2\pi, ..., \pm(2n-1)\pi.$$

Kako su funkcije neparne, fokusirati ćemo se samo na ponašanje desno od nule.

Najbliža kritična točka sa te strane je $\frac{\pi}{2n}$. Kako je:

$$f_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{\sin(\frac{3\pi}{2n})}{3} + \ldots + \frac{\sin(\frac{(2n-1)\pi}{2n})}{(2n-1)}\right).$$

Da bi našli asimtotu kada je n velik, koristit ćemo Riemannove sume. Promotrimo funkciju $F(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ na intervalu $[0, \pi]$, i podjelu $\left\{\frac{k\pi}{n},\ k \in [1, n]\right\}$ na $[0, \pi]$.
Stoga Riemannova suma izgleda ovako:

$$\frac{\pi}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}}+\ldots+\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)}{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}\right)$$

a konvergira u $\int_0^\pi F(x)dx$. Jednostavno računanje pokazuje da su sume jednake:

$$\frac{\pi}{2}f_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Stoga

$$\lim_{n\to\infty} f_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}dx.$$

Koristeći Taylorove polinome od $\sin(x)$ u 0, dobivamo

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}dx = 2-\frac{\pi^2}{9}+\frac{\pi^4}{300}-\frac{\pi^6}{17640}+\ldots$$

imamo

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}dx = 1,18.$$

Ti "skokovi" u blizini nule se ponašaju kao valovi visine 0,18. To nije slučaj samo sa ovom funkcijom. Zaista, Gibbs je pokazao da ako je $f(x)$ glatka na čitavom intervalu $[-\pi,\pi]$, a x_0 je točka šiljka, tada će Fourierove parcijalne sume imati isto ponašanje, sa "skokovima" visine približno:

$$0,09\Big(f(x_0+)-f(x_0-)\Big).$$

Za izbjegavanje ovog fenomena, uvodimo novi koncept **σ-aproksimacija**. Neka je $f(x)$ funkcija koja je glatka na čitavom intervalu $[-\pi,\pi]$ i $f_N(x)$ njena Fourierova parcijalna suma. Postavimo:

$$S_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n=N}\left(a_n\sigma_n\cos(nx)+b_n\sigma_n\sin(nx)\right),$$

gdje je:

$$\sigma_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{\frac{n\pi}{N}}, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

i zove se σ**-factor**. Da bi mogli bolje vidjeti niz suma $\{S_N(x)\}$ treba aproksimirati funkciju *f*(*x*), a ne Fourierove parcijalne sume $\{f_N(x)\}$. Koristimo sljedeći rezultat:

Teorem: Imamo

$$S_N(x) = \int_{-\pi/N}^{\pi/N} f_N(x+t)dt.$$

Fourierovi redovi, polinomi i integrali

Dokaz: Imamo:

$$\frac{N}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \cos(n(x+t))dt = \frac{N}{2\pi}\cos(nx)\frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{n} = \cos(nx)\sigma_n.$$

Slično imamo:

$$\frac{N}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} \sin(n(x+t))dt = \sin(nx)\sigma_n.$$

Stoga je:

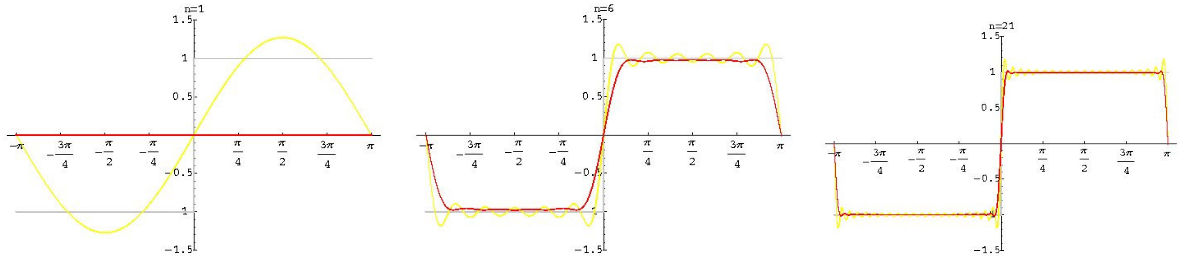
$$\frac{N}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{N}}^{\frac{\pi}{N}} s_N(x+t)dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=N}(a_n\cos(nx)\sigma_n + b_n\sin(nx)\sigma_n)$$

Što vodi do sljedećeg zaključka:

Koristeći gornje zaključke, možemo lako vidjeti da su sume $\{S_N(x)\}$ vrlo dobro aproksimirale funkciju *f*(*x*). Na sljedećem grafu više ne možemo uočiti Gibbsov fenomen.

Primjer: Slika:

Uporaba σ-aproksimacije



pokazuje da je σ-aproksimacija pomogla u uklanjanju Gibbsovog fenomena za funkciju f(x):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Napomena; u ovom slučaju imamo:

$$f_N(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + ... + \frac{\sin(N-1)x}{N-1}\right),$$

i

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) + \ldots + \frac{1}{(N-1)^2}\sin((N-1)x)\sin\left(\frac{(N-1)\pi}{N}\right)\right].$$

OPERACIJE S FOURIEROVIM REDOVIMA

Rezultati koji će biti izvedeni na u ovom poglavlju mogu se lako proširiti na funkciju definiranu na svakom intervalu [*a*,*b*]. Zato ćemo bez gubitka općenitosti, pretpostaviti da su sljedeće prom!!!a!!!trane funkcije 2π-periodične i definirane na $[-\pi, \pi]$.

Neka je *f*(*x*) 2π-periodična neprekidna funkcija. Tada je funkcija:

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt$$

neprekidna i 2π-periodična ako i samo ako je $F(\pi) = F(-\pi) = 0$ i Fourierov koeficijent a_0 = 0. Također je jednostavno pokazati, da ako je *f*(*x*) glatka na čitavom intervalu, tada je i *F*(*x*). Interesantno bi bilo pronaći vezu između Fourierovih koeficijenata funkcija f(x) i F(x), ako postoji. Za A_n i B_n, kao Fourierove koeficijente F(x), imamo:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx) dx.$$

Integracija po djelovima izraza daje:

$$A_n = \frac{1}{n\pi} [F(x) \sin(nx)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \sin(nx) dx,$$

za $n \geq 1$. Stoga je

$$A_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Slični proračun daje:

$$B_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

i

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x f(x) dx.$$

To pokazuje sljedeće:

Teorem: (Integracija Fourierovih redova)
Neka je *f*(*x*) 2π-periodična neprekidna funkcija, takva da je a_0 = 0. Ako je:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

Tada je:

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n \sin(nx) - b_n \cos(nx)),$$

gdje je: $A_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x f(x) dx$.

Kako je $F(x)$ neprekidna, imamo za svaki: $x \in [-\pi, \pi]$

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(a_n \sin(nx) - b_n \cos(nx)\Big),$$

Primjer: Promatramo funkciju:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

Imamo:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \ldots).$$

Kako, za svaki $x \in [-\pi, \pi]$, imamo:

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = |x| - \pi,$$

tada je:

$$|x| - \pi \sim A_0 + \frac{4}{\pi}\left(-\cos(x) - \frac{\cos(3x)}{9} - \frac{\cos(5x)}{25} - \cdots\right).$$

Jednostavni proračun daje:

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x f(x)dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Stoga je:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} + \dots\right).$$

Neka je *f*(*x*) 2π-periodična neprekidna funkcija takva da vrijedi $a_0 \neq 0$. Postavimo $h(x) = f(x) - a_0$. Tada je *h*(*x*) 2π-periodična neprekidna funkcija i zadovoljava sljedeći uvjet:

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = 0.$$

Kako je:

$$\int_x^y f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{y} f(t)dt - \int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{y} f(t)dt - \int_{-\pi}^{x} f(t)dt + \int_x^y a_0 dt,$$

iz gornjeg rezultata sljedi:

$$\int_x^y f(t)dt = a_0(y-x) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_x^y \Big[a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\Big]dt$$

što kompletira dokaz.

Teorem: Neka je *f*(*x*) 2π-periodična neprekidna funkcija. Tada za svaki x i y, integral:

$$\int_x^y f(t)dt$$

integriranjem "!!!član po član!!!" daje Fourierov red funkcije *f*(*x*).

Primjer: U gornjem primjeru, pokazali smo da je:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} + \dots\right).$$

Stoga je:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x| dx = \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{5^3} - \dots\right).$$

Što dovodi do formule:

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

Ovakva vrsta formula je zapravo jako interesantna. Ne dopušta nam pronaći aproksimaciju iracionalnog broja π. !!! ne razumijem poslj. rečenicu!!!

Primjer: Pokažimo da trigonometrijski red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln(1+n)},$$

nije Fourierov red niti jedne funkcije.

Rješenje: Lako je dokazati da red konvergira za svaki $x \in \mathbf{R}$. Pretpostavimo da postoji funkcija čiji je red zadani red, te da je to ujedno i njezin Fourierov red. Tada:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n \ln(1+n)},$$

mora konvergirati, budući da će biti Fourierov red od !!!primitivne funkcije od!!! *f*(*x*). Ali ovaj red ne konvergira kada je *x*=0. Kontradikcija:

Nakon što smo rješili vezu između Fourierovog reda funkcije i toga što ne postoji derivacija u svakoj točki te funkcije, prirodno je naći sličnu vezu između funkcije i njene derivabilnosti. Rješenje ovog problema je malo kompliciranije. Ali imamo sljedeći teorem:

Teorem: Neka je *f*(*x*) 2π-periodična, neprekidna i glatka funkcija. Tada za svaki $x \in [-\pi, \pi]$, imamo:

$$\frac{(f'(x+) + f'(x-))}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(- a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)\Big).$$

Drugim riječima, dobivamo Fourierov red od $f'(x)$ diferencirajući Fourierov red od f(x) !!!član po član!!!

Teorem: Promotrimo monotonu zatvorenu krivulju u ravnini *xy*. Označimo sa P njezinu duljinu (opseg), a sa *A* njezinu površinu. Tada imamo:

$$4\pi A \leq P^2.$$

Jednakost je !!! !!!! ako i samo ako je krivulja krug.

Dokaz: Parametarska !!!jednadžba!!! krivulje može biti dana na sljedeći način:

$$(x(t), y(t)) \quad t \in [-\pi, \pi]$$

uz $x(-\pi) = x(\pi)$ i $y(-\pi) = y(\pi)$. Formule kojim se dobivaju *P* i *A* su:

$$P = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$ i $$A = \int_{-\pi}^{\pi} x \frac{dy}{dt} dt.$$

Postavimo:

$$s(t) = \int_{-\pi}^{t} \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du.$$

Tada je $P = s(\pi)$. Uključimo novu varijablu $\tilde{t} = -\pi + \frac{2\pi s(t)}{P}$. Sada !!!u!!! parametarsku !!!jednadžbu stavimo!!! $\tilde{t}$; dobivamo:

$$(\tilde{x}(\tilde{t}), \tilde{y}(\tilde{t})) = (x(t), y(t)).$$

Jadnostavni proračun daje:

$$\left(\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}\right)^2+\left(\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}}\right)^2=\frac{P^2}{4\pi^2};$$

nova varijabla nam onemogućuje ponovno predočiti krivulju pomoću parametara pretpostavljajući kvantitetu:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

konstantnom. Stoga:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{P^2}{4\pi^2}.$$

Kako je krivulja glatka, dobivamo:

$$\begin{cases} x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right) \\ y(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos(nx)+d_n\sin(nx)\right). \end{cases}$$

Prethodni rezultat o vezi između Fourierovih koeficijenata funkcije i njezine derivabilnosti, daje:

$$x'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\Big(-a_n\sin(nt)+b_n\cos(nt)\Big),$$

i

$$y'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\Big(-c_n\sin(nx)+d_n\cos(nx)\Big).$$

Parsevalova formula (energetski teorem) kaže:

$$\frac{P^2}{2\pi}=\int_{-\pi}^{\pi}((x')^2+(y')^2)dt=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2\Big(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2\Big).$$

S druge strane imamo:

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y'(t)dt = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \Big([x(t)+y'(t)]^2 - [x(t)+y'(t)]^2\Big)dt.$$

Kako je:

$$A = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(a_n d_n - b_n c_n\Big).$$

Algebarskom manipulacijom dobivamo:

$$\frac{P^2}{2\pi} - 2A = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \Big[n(a_n - d_n)^2 + n(b_n + c_n)^2 + n(n-1)(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)\Big].$$

Kako je drugi dio prethodne jednakosti pozitivan, pojednostavljujemo prvi dio iste. S druge strane, imat ćemo $\frac{P^2}{2\pi} - 2A = 0$ ako i samo ako vrijedi

$$\begin{cases} a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 & = & 0, \\ a_1 - d_1 & = & 0, \\ b_1 + c_1 & = & 0. \end{cases}$$ za svaki $n > 1$

To vodi do:

$$\begin{cases} x(t) & = & a_0 + a_1\cos(t) - c_1\sin(t) \\ y(t) & = & c_0 + c_1\cos(t) + a_1\sin(t) \end{cases}$$

za svaki $t \in [-\pi, \pi]$. Stoga je krivulja krug središta u točki (a_0, c_0) polumjera $\sqrt{a_1^2 + c_1^2}$, što je dokaz teorema.

PRIMJENA FOURIEROVIH REDOVA ZA RJEŠAVANJE DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Od početka je Fourier želio pronaći efikasan alat za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Zato ćemo sada govoriti o primjeni Fourierovih redova baš u tu svrhu.Samo ćemo se osvrnuti na jednadžbe sljedećeg oblika:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + a_1 y' + a_0\, y = f(x),$$

gdje je $f(x)$ 2π-periodična funkcija.

Trebat ćemo **kompleksni** oblik Fourierovog reda periodičnih funkcija, pa ga idemo prvo definirati:

Definicija: Neka je $f(x)$ 2π-periodična funkcija. **Kompleksni Fourierov red** od $f(x)$ glasi:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{in\pi x},$$

gdje je:

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-in\pi x}dx.$$

Koristit ćemo sljedeće oznake:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{in\pi x}.$$

Ako se pitate o vezi između realnih i kompleksnih Fourierovih koeficijenata, odgovorit će vam sljedeći teorem:

Teorem: Neka je $f(x)$ 2π-periodična funkcija. Promotrimo realne Fourierove koeficijente $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ od $f(x)$, kao i kompleksne Fourierove koeficijente $\{d_n\}$. Imamo sljedeće:

$$\begin{cases} d_0 &= a_0, \\ d_n &= \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right), \quad n \geq 1 \\ d_{-n} &= \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right), \text{ za } n \geq 1 \end{cases}$$

Dokaz se temelji na Eulerovoj formuli za kompleksne eksponencijalne funkcije.

Napomena: Kada je $f(x)$ $2L$-periodična, tada je kompleksni Fourierov red definiran slično kao i prije, samo je:

$$d_n = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x) e^{-i(n\pi x/c)} dx,$$

!!!pomiješano L i c!!!

za svaki $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Primjer: Neka je $f(x) = x$, za $x \in]-1, 1[$ i $f(x+2) = f(x)$. Treba naći njegove kompleksne Fourierove koeficijente $\{d_n\}$.
!!!što je ovaj znak naopaka zagrada!!!

Rješenje: Imamo $d_0 = 0$ i

$$d_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x e^{-in\pi x} dx.$$

Jednostavnim računom dobivamo:

$$d_n = \frac{-1}{2} \left[\frac{e^{in\pi}}{in\pi} + \frac{e^{-in\pi}}{in\pi} - \frac{e^{in\pi}}{(in\pi)^2} + \frac{e^{-in\pi}}{(in\pi)^2} \right].$$

Kako je $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$, dobivamo $d_n = \frac{(-1)^n}{(in\pi)}$. Zatim:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in\pi} \left[e^{in\pi x} - e^{-in\pi x} \right].$$

!!!Vratimo se!!! na prvobitni problem. Da bi primjenili Fouriera na diferencijalne jednadžbe, trebamo vezu između kompleksnih koeficijenata funkcije sa njezinom derivabilnošću. Imamo sljedeći teorem:

Teorem: Neka je *f*(*x*) 2*L*-periodična funkcija. Pretpostavimo de je derivabilna. Ako je:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{i(n\pi x)/L},$$

tada je:

$$f'(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{in\pi}{c} d_n e^{i(n\pi x)/L}.$$

!!!nije c već L!!!

Primjer: Treba naći periodična rješenja diferencijalne jednadžbe:

$$y' + 2y = f(x),$$

gdje je *f*(*x*) 2π-periodična funkcija.

Rješenje: Postavimo:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{in\pi x}.$$

Neka je *y* bilo koje 2π-periodično rješenje diferencijalne jednadžbe. Pretpostavimo:

$$y \sim \sum_{-\infty}^{\infty} y_n e^{in\pi x}.$$

Tada iz diferencijalne jednadžbe dobivamo:

$iny_n + 2y_n = f_n$, za svaki n

Kako je:

$$y_n = \frac{1}{2+in} f_n,$$ za svaki n

Stoga imamo:

$$y = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+in} f_n e^{in\pi x}.$$

!!!treba kazati što je f_n!!!

Primjer: Treba naći periodično rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y'' + 2y' + y = \sin(x).$$

Rješenje: Zbog:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

dobivamo $\sin(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{in\pi x}$ uz

$$\begin{cases} f_1 &= 1/2i \\ f_{-1} &= -1/2i \\ f_n &= 0 \end{cases}$$ za $n \neq \pm 1.$

Neka je *y* periodično rješenje diferencijalne jednadžbe. Ako je:

$$y \sim \sum_{-\infty}^{\infty} y_n e^{in\pi x},$$

tada je $\left[(in)^2 + 2(in) + 1\right] y_n = f_n$. Tako je:

$y_1 = y_{-1} = -\frac{1}{4}$, i $y_n = 0$ u ostalim slučajevima.

Stoga, zadana diferencijalna jednadžba ima samo jedno periodično rješenje:

$$y = -\frac{1}{4}e^{ix} - \frac{1}{4}e^{-ix} = -\frac{1}{2}\cos(x).$$

Najvažniji rezultat može se izreći sljedećim teoremom:

Teorem: Obratimo pozornost na sljedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$y^{(m)} + a_{m-1}y^{(m-1)} + \ldots\ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

gdje je $f(x)$ 2c-periodična funkcija. Pretpostavimo:

$$p\big((in)/c\big) = \left(\frac{in}{c}\right)^m + a_{m-1}\left(\frac{in}{c}\right)^{m-1} + \cdots + a_1\left(\frac{in}{c}\right) + a_0 \neq 0,$$

za $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Tada diferencijalna jednadžba ima samo jedno 2c-periodično rješenje, dano sa:

$$y \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p\big((in)/c\big)} f_n e^{i(n\pi x)/c},$$

gdje je

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{i(n\pi x)/c}.$$

ZAKLJUČAK

Za prvi susret sa ovom temom mogu samo reći da je vrlo široka i zahtjeva mnoga predznanja, kao i mnoga proširenja (tek stečenih znanja) u drugim smjerovima na koje ona ukazuje. Ova radnja može poslužiti kao jedan kratak uvod, ili bolje rečeno kao samo jedan od mnogih pogleda na Fourierove redove, polinome, integrale... Logično bi možda bilo u ovom radu osvrnuti se na rubne probleme (kao što su rubni uvjeti, linearnost i sl.), ili pak možda na Fourierovu metodu s!!!e!!!paracije varijabli pri rješavanju konkretnih diferencijalnih jednadžbi (kao što su one kod vođenja topline, oscilacija žice i sl).

Jedino što mogu zaključiti je "da bi ovo mogao biti početak jednog divnog prijateljstva" sa Fourierom, te da ću vjerojatno tek poslije (kroz ostale teme ovog kolegija, u inženjerskoj praksi ili u daljnjem školovanju) uvidjeti još neke njegove primjene i prednosti.